2　恒等式・割り算の問題

Practice 2

(1)

$x^2-x+1=0$ の解は $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とおくと，ω は $x^2-x+1=0$ の解だから，$\omega^2-\omega+1=0$

よって，$\omega(\omega^2-\omega+1)=0$ すなわち $\omega^3-\omega^2+\omega=0$

これより，

$$\begin{aligned}\omega^3&=\omega^2-\omega\\&=-1\qquad(\because \omega^2-\omega+1=0\Leftrightarrow\omega^2-\omega=-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega^{48}&=(\omega^3)^{16}\\&=(-1)^{16}\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega^{47}&=\omega^{45}\cdot\omega^2\\&=(\omega^3)^{15}\cdot(\omega-1)\\&=(-1)^{15}(\omega-1)\\&=(-1)(\omega-1)\\&=-\omega+1\end{aligned}$$

または，

$$\begin{aligned}\omega^{47}&=\omega^{48}\cdot\frac{1}{\omega}\\&=1\cdot\frac{1}{\omega}\\&=\frac{1}{\omega}\end{aligned}$$

ここで，$\omega^2-\omega+1=0$ より，$\dfrac{1}{\omega}\cdot(\omega^2-\omega+1)=0$ すなわち $\omega-1+\dfrac{1}{\omega}=0$　$\therefore\dfrac{1}{\omega}=-\omega+1$

よって，$\omega^{47}=-\omega+1$

(2)

商を $Q(x)$ とすると，$x^{61}+3x^{48}-3x^{47}=(x^2-x+1)Q(x)+ax+b$

よって，$\omega^{61}+3\omega^{48}-3\omega^{47}=(\omega^2-\omega+1)Q(\omega)+a\omega+b$

ここで，(1)および

$$\begin{aligned}\omega^{61}&=\omega^{60}\cdot\omega\\&=(\omega^3)^{20}\cdot\omega\\&=(-1)^{20}\omega\\&=\omega\end{aligned}$$

より，

$\omega^{61}+3\omega^{48}-3\omega^{47}=\omega+3\cdot1-3(-\omega+1)$

$=4\omega$

$(\omega^2-\omega+1)Q(\omega)+a\omega+b=a\omega+b$

よって， $4\omega=a\omega+b$

これに $\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ を代入すると， $2+2\sqrt{3}i=a\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}+b$

よって， $2-\dfrac{a}{2}-b+\left(2-\dfrac{a}{2}\right)\sqrt{3}i=0\quad\therefore a=4,\ b=0$

補足

$4(p+qi)=a(p+qi)+b\Leftrightarrow 4p+4qi=ap+b+aqi$

$\Leftrightarrow(4-a)p-b+q(4-a)i=0$

7

(1)

解法 **1**：代入法

$x=-2$ のとき

$d=-10$ ・・・①

$x=-1$ のとき

$a+b+c+d=4$ ・・・②

$x=0$ のとき

$8a+4b+2c+d=4$ ・・・③

$x=-3$ のとき

$-a+b-c+d=-50$ ・・・④

①，②，③，④より， $a=2,\ b=-13,\ c=25,\ d=-10$

逆に， $a=2,\ b=-13,\ c=25,\ d=-10$ とすると，与式が成り立つ。

解法 **2**：係数比較

$x+2=t$ とおくと， $at^3+bt^2+ct+d=2(t-2)^3-(t-2)^2-3(t-2)+4$

よって， $at^3+bt^2+ct+d=2t^3-13t^2+25t-10\quad\therefore a=2,\ b=-13,\ c=25,\ d=-10$

(2)

与式が x についての恒等式ならば，

その両辺に $(x+1)(x^2+1)$ を掛けた式も x についての恒等式である。

つまり， $3x^2-x-2=ax^2+1+(bx+c)(x+1)$

すなわち $3x^2-x-2=(a+b)x^2+(b+c)x+c+1$ も x についての恒等式である。

よって， $a+b=3,\ b+c=-1,\ c+1=-2$

この連立方程式を解くと， $a=1,\ b=2,\ c=-3$

逆に $a=1,\ b=2,\ c=-3$ とすると，与式は恒等式である。

8

$P(x)$ を x^2-3x+2 で割った商を $A(x)$，x^2-x-2 で割った商を $B(x)$ とすると，

$P(x)=(x^2-3x+2)A(x)+12x-5$

$\quad=(x-1)(x-2)A(x)+12x-5$ ・・・①

$P(x)=(x^2-x-2)A(x)+2x+15$

$\quad=(x+1)(x-2)A(x)+2x+15$ ・・・②

$P(x)$ を $x-1$ で割った商を $C(x)$，余りを k とすると，

$P(x)=(x-1)C(x)+k$ より，$P(1)=k$

一方，①より，$P(1)=12\cdot1-5=7$ ・・・③

よって，$k=7$ ・・・ア

$P(x)$ を x^2-1 で割った商を $D(x)$，余りを $mx+n$ とすると，

$P(x)=(x^2-1)D(x)+mx+n$ より，

$P(1)=m+n$ ・・・④

$P(-1)=-m+n$ ・・・⑤

よって，③，④より，$m+n=7$ ・・・⑥

②より，$P(-1)=2\cdot(-1)+15=13$

これと⑤より，$-m+n=13$ ・・・⑦

⑥と⑦の連立方程式を解くことにより，

$m=-3$ ・・・イ

$n=10$ ・・・ウ

9

$x-2y+z=4$ より，$2y-z=x-4$ ・・・①

$2x+y-3z=-7$ より，$y-3z=-2x-7$ ・・・②

①×3－②より，$5y=5x-5$ $\therefore y=x-1$ ・・・③

③を①に代入し整理することにより，$z=x+2$ ・・・④

③，④を $ax^2+2by^2+3cz^2=18$ に代入し，x について整理すると，

$(a+2b+3c)x^2-4(b-3c)x+2(b+6c)=18$

これは x の恒等式だから，$a+2b+3c=0,\ b-3c=0,\ b+6c=9$

この連立方程式を解くことにより，$a=-9,\ b=3,\ c=1$

よって，ア：9，イ：3，ウ：1

10

(1)

$x^2+(y+5)x-6y^2+ay+4=0$ と解の公式より，

$$x=\frac{-(y+5)\pm\sqrt{(y+5)^2-4(-6y^2+ay+4)}}{2}$$
$$=\frac{-(y+5)\pm\sqrt{25y^2+2(5-2a)y+9}}{2}$$

よって，

$$x^2+(y+5)x-6y^2+ay+4$$
$$=\left\{x-\frac{-(y+5)+\sqrt{25y^2+2(5-2a)y+9}}{2}\right\}\left\{x-\frac{-(y+5)-\sqrt{25y^2+2(5-2a)y+9}}{2}\right\}$$

これが 1 次式の積として表されるための必要十分条件は $\sqrt{25y^2+2(5-2a)y+9}$ が 1 次式であること，すなわち $25y^2+2(5-2a)y+9=0$ が重解をもつことである。

よって，判別式を D とすると，$D=0$ より，$\frac{D}{4}=(5-2a)^2-225=0$　$\therefore a=-5,\ 10$

(2)

$a=-5$ のとき

$$\sqrt{25y^2+30y+9}=\sqrt{(5y+3)^2}$$
$$=|5y+3|$$

$$\therefore \left\{x-\frac{-(y+5)+|5y+3|}{2}\right\}\left\{x-\frac{-(y+5)-|5y+3|}{2}\right\}$$
$$=\left\{x-\frac{-(y+5)\pm(5y+3)}{2}\right\}\left\{x-\frac{-(y+5)\mp(5y+3)}{2}\right\}$$
$$=(x-2y+1)(x+3y+4)$$

$a=10$ のとき

$$\sqrt{25y^2-30y+9}=\sqrt{(5y-3)^2}$$
$$=|5y-3|$$

$$\therefore \left\{x-\frac{-(y+5)+|5y-3|}{2}\right\}\left\{x-\frac{-(y+5)-|5y-3|}{2}\right\}$$
$$=\left\{x-\frac{-(y+5)\pm(5y-3)}{2}\right\}\left\{x-\frac{-(y+5)\mp(5y-3)}{2}\right\}$$
$$=(x-2y+4)(x+3y+1)$$

11

(1)

$$
\begin{aligned}
f(0)&=f(0^3)\\
&=0^4\cdot f(1)-15\cdot 0^5-10\cdot 0^4+5\cdot 0^3\\
&=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(-1)&=f\left((-1)^3\right)\\
&=(-1)^4f(0)-15(-1)^5-10(-1)^4+5(-1)^3\\
&=1\cdot 0-15\cdot(-1)-10\cdot 1+5\cdot(-1)\\
&=0+15-10-5\\
&=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(-8)&=f\left((-2)^3\right)\\
&=(-2)^4f(-1)-15(-2)^5-10(-2)^4+5(-2)^3\\
&=16\cdot 0-15\cdot(-32)-10\cdot 16+5\cdot(-8)\\
&=0+15\cdot 32-10\cdot 16-5\cdot 8\\
&=8(15\cdot 4-10\cdot 2-5)\\
&=280
\end{aligned}
$$

(2)

$f(x)$ の n 次の項を ax^n， $n-1$ 次以下の多項式の部分を $g(x)$ とすると，
$f(x)=ax^n+g(x)$ と表せる。
よって，

$$
\begin{aligned}
f(x^3)&=a(x^3)^n+g(x^n)\\
&=ax^{3n}+g(x^n)
\end{aligned}
$$

より，与式左辺 $f(x^3)$ の次数は $3n$ ・・・①
一方，

$$
\begin{aligned}
x^4f(x+1)-15x^5-10x^4+5x^3&=x^4\{a(x+1)^n+g(x+1)\}-15(x+1)^5-10(x+1)^4+5(x+1)^3\\
&=ax^4(x+1)^n+x^4g(x+1)-15(x+1)^5-10(x+1)^4+5(x+1)^3
\end{aligned}
$$

これと $n\geq 1$ より，与式右辺の次数は $n+4$ ・・・②
よって，①＝②より， $3n=n+4$ $\therefore n=2$

(3)

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと， $f(0)=0,\ f(-1)=0,\ f(-8)=280$ より， $\begin{cases}c=0\\a-b+c=0\\64a-8b+c=280\end{cases}$

この連立方程式を解くと， $a=b=5,\ c=0$ $\therefore f(x)=5x^2+5x$

12

(1)

P を $(x-1)(x+1)^2$ で割った商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c すると，

$P=(x-1)(x+1)^2Q(x)+ax^2+bx+c$ と表せる。

ここで，P を $(x+1)^2$ で割った余りが $x-8$ であることと

ax^2+bx+c は $(x+1)^2$ で割り算できることから，

ax^2+bx+c を $(x+1)^2$ で割った余りは $x-8$ である。

よって，$P=(x-1)(x+1)^2Q(x)+a(x+1)^2+x-8$

また，P を $x-1$ で割った余りが 5 より，$x=1$ のとき $P=5$

よって，$a(1+1)^2+1-8=5$ より，$a=3$

ゆえに，求める余りは $3(x+1)^2+x-8$　すなわち　$3x^2+7x-5$

(2)

ア

$f(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$，$f(x)$ を $x-1$ で割った商を $A(x)$，余りを a とおくと，

$f(x)=(x-1)A(x)+a$ と表せる。よって，$f(1)=a$

これと，$f(1)=1^{n-1}+1^{n-2}+\cdots+1^1+1=n$ より，$a=n$

ゆえに，求める余りは n

イ

解法 1

$$\begin{aligned} x^n-1&=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)\\ &=(x-1)\{(x-1)A(x)+n\}\\ &=(x-1)^2A(x)+n(x-1) \end{aligned}$$

よって，求める余りは $n(x-1)$

解法 2

$g(x)=x^n-1$，$g(x)$ を $(x-1)^2$ で割った商を $B(x)$，余りを $bx+c$ とおくと，

$g(x)=(x-1)^2B(x)+bx+c$ と表せるから，$g(1)=b+c$

また，$g(x)=x^n-1$ より，$g(1)=0$

よって，$b+c=0$　・・・①

$g(x)=x^n-1$ より，$g'(x)=nx^{n-1}$　$\therefore g'(1)=n$　・・・②

$g(x)=(x-1)^2B(x)+bx+c$ より，$g'(x)=2(x-1)B(x)+(x-1)^2B'(x)+b$

$\therefore g'(1)=b$　・・・③

②＝③より，$b=n$

これを①に代入し，整理することにより，$c=-n$

ゆえに，求める余りは $nx-n$

ウ・エ

$g(x)=x^n-1$，$g(x)$をx^2-1で割った商を$h(x)$，余りを$mx+n$とおくと，
$g(x)=(x^2-1)h(x)+mx+n$と表せる。

nが偶数のとき

$g(x)=x^n-1$より，$g(1)=0,\ g(-1)=0$
$g(x)=(x^2-1)h(x)+mx+n$より，$g(1)=m+n,\ g(-1)=-m+n$

よって，$\begin{cases} m+n=0 \\ -m+n=0 \end{cases}$

これを解くと$m=n=0$

ゆえに，求める余りは0　・・・ウ

nが奇数のとき

$g(x)=x^n-1$より，$g(1)=0,\ g(-1)=-2$
$g(x)=(x^2-1)h(x)+mx+n$より，$g(1)=m+n,\ g(-1)=-m+n$

よって，$\begin{cases} m+n=0 \\ -m+n=-2 \end{cases}$

これを解くと$m=1,\ n=-1$

ゆえに，求める余りは$x-1$　・・・エ